الأسس

تعريف :

إذا كان : أ عدداً حقيقياً ، ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :

* $أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times أ \times \cdots\cdots \times أ$ حيث : أ مكرر كعامل ن من المرات

** $أ^{صفر} = ١$ حيث أ $\neq$ صفر

فمثلاً :

$(\sqrt{٣})^{٤} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٨١} = ٩$

قوانين الأسس :

١ ـ إذا كان : أ عدداً حقيقياً ، ن ، م عددين صحيحين غير سالبين فإن :

$أ^{ن} \times أ^{م} = أ^{ن + م}$ حيث : أ $\neq$ صفر إذا كان : م = صفر ، أ ن = صفر

فمثلاً :

$(\sqrt{٣})^{٤} \times (\sqrt{٣})^{٢} = (\sqrt{٣})^{٦} = ٢٧$

٢ ـ إذا كان : أ عدداً حقيقياً ، ن ، م عددين صحيحين غير سالبين فإن :

$أ^{ن} \div أ^{م} = أ^{ن - م}$ حيث : أ $\neq$ صفر ، ن $\geq$ م

فمثلاً :

$(\sqrt{٣})^{٤} \div (\sqrt{٣})^{٢} = (\sqrt{٣})^{٢} = ٣$

٣ ـ إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين ، ن عدداً صحيحاً غير سالب فإن :

$(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$ حيث : أ $\neq$ صفر ، ب $\neq$ صفر

فمثلاً :

$(\sqrt{٣} \times \sqrt{٥})^{٢} = (\sqrt{٣})^{٢} \times (\sqrt{٥})^{٢} = ٣ \times ٥ = ١٥$

ملاحظات :

** $(أ + ب)^{ن} \neq أ^{ن} + ب^{ن}$ ، $(أ - ب)^{ن} \neq أ^{ن} - ب^{ن}$

فمثلا : $(٣ + ٤)^{٣} = ٧^{٣} = ٣٤٣$ **بينما :** $٣^{٣} + ٤^{٣} = ٢٧ + ٦٤ = ٩١$

** $(-أ)^{ن} = \begin{cases} أ^{ن} & \text{إذا كان : ن عدداً زوجياً} \\ -أ^{ن} & \text{إذا كان : ن عدداً فردياً} \end{cases}$

فمثلا : $(-٣)^{٤} = ٨١$ ، $(-٣)^{٣} = -٢٧$

٤ ـ إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين ، ن عدداً صحيحاً غير سالب فإن :

$(أ \div ب)^{ن} = أ^{ن} \div ب^{ن}$ حيث أ $\neq$ صفر ، ب $\neq$ صفر

فمثلاً :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}}\right)^{٢} = \frac{(\sqrt{٣})^{٢}}{(\sqrt{٥})^{٢}} = \frac{٣}{٥}$

أحمد الشنتورى a_shantory٢٠٠٧@yahoo.com

٥ ـ إذا كان : $ا$ عدداً حقيقياً ، $م$ ، $ن$ عددين صحيحين غير سالبين فإن :

$(ا^{م})^{ن} = ا^{م ن}$ حيث : $ا \neq$ صفر عندما $م =$ صفر أ، $ن =$ صفر

فمثلا : $(٢^{٣})^{٢} = ٢^{٦} = ٦٤$ ، $(٢^{٢})^{٣} = ٢^{٦} = ٦٤$

٦ ـ إذا كان : $ا$ عدداً حقيقياً لا يساوى الصفر ، $ن$ عددياً صحيحاً موجباً فإن :

$ا^{-ن} = \frac{١}{ا^{ن}}$ ، $ا^{ن} = \frac{١}{ا^{-ن}}$

فمثلا : $٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$ ، $(\sqrt{٣})^{-٢} = \frac{١}{٣}$

ملاحظات :

١ ـ إذا كان : $ا$ عدداً حقيقياً لا يساوى الصفر ، $ن$ عددياً صحيحاً موجباً

فإن : $ا^{ن} \times ا^{-ن} = ١$ أى أن : كل من $ا^{ن}$ ، $ا^{-ن}$ هو معكوس ضربى للآخر

٢ ـ إذا كان : $ا$ ، $ب$ عددين حقيقيين لا يساويان الصفر ، $ن$ عددياً صحيحاً موجباً

فإن : $(\frac{ا}{ب})^{-ن} = (\frac{ب}{ا})^{ن}$ فمثلا : $(\frac{٣}{٤})^{-٣} = \frac{٦٤}{٢٧}$

تدريبات :

أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١ ـ $٣^{٢} \times ٣^{٥} = ...$ ($٣^{٧}$ ، $٣^{٣}$ ، $٣^{١٠}$ ، $٣^{٢٥}$)

٢ ـ $٥^{٢} + ٥^{٢} = ...$ ($١٠^{٢}$ ، $١٠^{٤}$ ، $٥^{٤}$ ، ٥٠)

٣ ـ $٣^{٥} \times ٢^{٥} = ...$ ($٥^{١٠}$ ، $٦^{١٠}$ ، $٦^{٥}$ ، $٦^{٢٥}$)

٤ ـ $(٥ س)^{صفر} = ...$ (٥ ، ٥ س ، س ، ١)

٥ ـ $٥ س^{صفر} = ...$ (٥ ، ٥ س ، س ، ١)

٦ ـ إذا كان : $(س - ٥)^{صفر} = ١$ فإن : $س \neq ....$ (صفر ، ١ ، ٥ ، ـ ٥)

٧ ـ $\frac{٦^{٢ن}}{٢^{٢ن} \times ٣^{٢ن}} = ...$ ($٢^{ن}$ ، ١ ، $٣^{ن}$ ، $٦^{ن}$)

٨ ـ إذا كان : $ص = ٧^{س}$ ، $ع = ٧^{-س}$ فإن : $ص \times ع$ (٧ ، ـ ٧ ، صفر ، ١)

٩ ـ إذا كان : $س^{٣} ص^{-٣} = ٨$ فإن : $ص^{٢} س^{-٢} = ...$ (٢ ، ٤ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$)

١٠ ـ إذا كان : $(\sqrt{\frac{٣}{٥}})^{ا} = \frac{٥}{٣}$ فإن : $ا = ...$ (ـ ٢ ، ١ ، ٢ ، ـ ١)

١١ ـ إذا كان : $س = ص$ فإن : $(٦٤ ا^{٣} ب^{٥})^{س - ص} = ...$ (٦٤ ، ١ ، س ، ص)

ملاحظات أخرى :

١ – إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن : م = ن حيث : أ ≠ صفر ، أ ≠ ±١

فمثلا : إذا كان : $٣^{س} = ٣^{٢}$ فإن : س = ٢

٢ – إذا كان : $أ^{م} = ب^{م}$ فإن :
- م = ٠ حيث : أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ ، أ ≠ ±ب
- أ = ب إذا كان م عدداً فردياً ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠
- أ = ±ب إذا كان م عدداً زوجياً ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

فمثلا : إذا كان : $٧^{س} = ٥^{س}$ فإن : س = صفر

، إذا كان : $س^{٣} = ٥^{٣}$ فإن : س = ٥

، إذا كان : $س^{٤} = ٥^{٤}$ فإن : س = ±٥

٣ – إذا كان : $أ^{م} = ١$ فإن : م = ٠ حيث : أ ≠ ٠ ، أ ≠ ±١

فمثلا : إذا كان : $٧^{س} = ١$ فإن : س = صفر

تدريبات

أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١ – إذا كان : $٥^{س} = ١٢٥$ فإن : س = ... (١ ، ٢ ، ٣ ، ٥)

٢ – إذا كان : $٣^{س} = ٩$ فإن : $٢^{س} - ١$ = ... (٧ ، ٣ ، ٨ ، ٥)

٣ – إذا كان : $٣^{س - ١} = ١$ فإن : س = ... (٣ ، ١ ، صفر ، −١)

٤ – إذا كان : $٣^{س - ٣} = ٣^{٥ - ٣س}$ فإن : س = ... (٣ ، ١ ، ٥ ، ٢)

٥ – إذا كان : $٣^{س} = ٥$ فإن : $٩^{س}$ = ... (١٥ ، ٢٥ ، ٢٧ ، ١)

٦ – إذا كان : $٥^{س} = ٣$ فإن : $٥^{س + ١}$ = ... (٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٥)

٧ – إذا كان : $٥^{س - ١} = ٣^{س - ١}$ فإن : س = ... (صفر ، ١ ، ٣ ، ٥)

٨ – إذا كان : س = $\sqrt{٧}$ ، ص = $(\sqrt{٧})^{-١}$ فإن : $س^{٥٠} ص^{٥٠}$ = ... (صفر ، ١ ، ٧ ، $\sqrt{٧}$)

أمثلة :

أختصر لأبسط صورة :

١ – $\frac{٩^{س} \times ٣^{س + ٢}}{٢٧^{س}}$

الحل

المقدار = $\frac{٣^{٢س} \times ٣^{س + ٢}}{٣^{٣س}} = ٣^{٢س + س + ٢ - ٣س} = ٣^{٢} = ٩$

٢ – $\frac{٨١^{س} \times ٦٢٥^{س}}{١٥^{٤س}}$

الحل

المقدار $= \frac{٣^{٤س} \times ٥^{٤س}}{(٣ \times ٥)^{٤س}} = \frac{٣^{٤س} \times ٥^{٤س}}{٣^{٤س} \times ٥^{٤س}}$

$= ٣^{٤س - ٤س} \times ٥^{٤س - ٤س} = ٣^{صفر} \times ٥^{صفر} = ١ \times ١ = ١$

٣ – $\frac{٢٧^{س-١} \times ٨^{س}}{(٢\sqrt{٢})^{٢س} \times (٣\sqrt{٣})^{٢س}}$

الحل

المقدار $= \frac{٣^{٣س-٣} \times ٢^{٣س}}{٢^{٣س} \times ٣^{٣س}} = ٣^{٣س-٣-٣س} \times ٢^{٣س-٣س} = ٣^{-٣} \times ٢^{صفر} = \frac{١}{٢٧} \times ١ = \frac{١}{٢٧}$

٤ – $\frac{٢^{٢س+١} \times ١٠^{س}}{٨^{س} \times ٥^{س+١}}$

الحل

المقدار $= \frac{٢^{٢س+١} \times ٢^{س} \times ٥^{س}}{٢^{٣س} \times ٥^{س+١}} = ٢^{٢س+١+س-٣س} \times ٥^{س-س-١} = ٢ \times ٥^{-١} = \frac{٢}{٥}$

٥ – أوجد قيمة س فيما يلى حيث : س $\in$ ص$_{+}$:

١ – $٢^{س-١} = ٣٢$

الحل

∵ $٢^{س-١} = ٣٢$ ∴ $٢^{س-١} = ٢^{٥}$

∴ س – ١ = ٥ ومنها : س = ٦

٢ – $٣^{س-١} = ١$

الحل

∵ $٣^{س-١} = ١$ ∴ $٣^{س-١} = ٣^{صفر}$

∴ س – ١ = صفر ومنها : س = ١

٣ – $٣^{س-٣} = \frac{١}{٩}$

الحل

∵ $٣^{س-٣} = \frac{١}{٩}$ ∴ $٣^{س-٣} = ٣^{-٢}$

∴ س – ٣ = –٢ ومنها : س = ١

٤ ـ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣-\text{س}} = \frac{٨١}{١٦}$

الحل

$\because \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣-\text{س}} = \frac{٨١}{١٦}$ $\therefore \left(\frac{٣}{٢}\right)^{\text{س}-٣} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٤}$

$\therefore \text{س} - ٣ = ٤$ ومنها : $\text{س} = ٧$

٥ ـ $٣^{\text{س}-٥} = ٤^{\text{س}-٥}$

الحل

$\because ٣^{\text{س}-٥} = ٤^{\text{س}-٥}$ $\therefore \text{س} - ٥ =$ صفر ومنها : $\text{س} = ٥$

٦ ـ $٢ \times ٤^{\text{س}+٣} = \frac{١}{٣٢}$

الحل

$\because ٢ \times ٤^{\text{س}+٣} = \frac{١}{٣٢}$ $\therefore ٢ \times ٢^{٢\text{س}+٦} = ٢^{-٥}$ $\therefore ٢^{٢\text{س}+٧} = ٢^{-٥}$

$\therefore ٢\text{س} + ٧ = -٥$ ومنها : $\text{س} = -٦$

٧ ـ $\frac{٦^{٢\text{س}-٣}}{٢^{\text{س}-١} \times ٣^{\text{س}-١}} = ٦$

الحل

$\because \frac{٦^{٢\text{س}-٣}}{٢^{\text{س}-١} \times ٣^{\text{س}-١}} = ٦$ $\therefore \frac{٦^{٢\text{س}-٣}}{(٢ \times ٣)^{\text{س}-١}} = ٦$

$\therefore \frac{٦^{٢\text{س}-٣}}{٦^{\text{س}-١}} = ٦$ $\therefore ٦^{٢\text{س}-٣-\text{س}+١} = ٦$

$\therefore ٦^{\text{س}-٢} = ٦$ $\therefore \text{س} - ٢ = ١$ ومنها : $\text{س} = ٣$

٨ ـ $\frac{٤^{٢\text{س}} \times (\sqrt{٣})^{٤\text{س}}}{٩^{\text{س}} \times ٤^{\text{س}}} = \frac{١}{١٦}$

الحل

$\because \frac{٤^{٢\text{س}} \times (\sqrt{٣})^{٤\text{س}}}{٩^{\text{س}} \times ٤^{\text{س}}} = \frac{١}{١٦}$ $\therefore \frac{٤^{٢\text{س}} \times ٩^{\text{س}}}{٩^{\text{س}} \times ٤^{\text{س}}} = \frac{١}{١٦}$

$\therefore ٤^{٢\text{س}-\text{س}} \times ٩^{\text{س}-\text{س}} = ٤^{-٢}$ $\therefore ٤^{\text{س}} \times ٩^{\text{صفر}} = ٤^{-٢}$

$\therefore ٤^{\text{س}} \times ١ = ٤^{-٢}$ $\therefore \text{س} = -٢$

تمـــارين

أ) أى العبارات الآتية صحيحة وأيها خطأ :

١) $٣^{٤} + ٢^{٤} = ٥^{٤}$

٢) $٣^{٤} \times ٢^{٤} = ٦^{٤}$

٣) $٢^{٣} \times ٥^{٣} = ١٠^{٦}$

٤) $٥\,س^{صفر} = (٥\,س)^{صفر}$

٥) $س^{٥} \div س^{٨} = س^{٣}$

ب) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

١) $٢^{س^{٣}} = (٢٥٦)^{-١}$

٢) $٥^{٣س - ٧} = س^{٣س - ٧س}$

٣) $١٣^{س^{٢} + ١٠س + ٢٥} = ١$

٤) $٣^{س - ٢} = ٩^{٣}$

٥) $٢^{س(س - ٤)} = ٣٢$

٦) $٤^{س - ٢} = ٨^{٣س - ٥}$

٧) $(١ + س)^{-٥} = \frac{١}{٢٤٣}$

٨) $(\sqrt{٧})^{|س - ٢|} = ٤٩$

٩) $\frac{١٢^{٣س - ٢} \times ٩^{س + ١}}{١٨^{٢س} \times ٤^{٣س - ٢}} = ٩$

١٠) $\frac{٩^{س + ١} \times ٤^{س - ١}}{٣٦^{س}} = (\frac{٣}{٢})^{س}$

حـ) اختصــــــر ما يأتى لأبســط صــورة :

١) $\frac{٢٧^{س} \times ٤^{س + ١}}{١٢^{س} \times ٣^{٢س + ١}}$

٢) $\frac{٥^{٤س - ١} \times ٢٧^{س + ١}}{١٢٥^{س - ١} \times ١٥^{س + ٥} \times ٣^{٢س - ٢}}$

٣) $\frac{٨^{ن - ٤} \times ٦^{٧ - ن} \times ٩^{ن - ٢}}{٢^{٢ن - ١٠} \times ٣^{ن + ٣}}$

٤) $\frac{(٢\,س^{٢}\,ص^{-٤})^{٤} \times (٥\,س^{٢}\,ص^{-٧})^{-٢}}{(٤\,س^{-٢}\,ص)^{-٢}}$

ء) أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١) $٥^{س + ١} + ٥^{س - ١} = ٢٦$

٢) $٤^{س} + ٢^{س + ١} = ٨$

٣) $٢^{٢س + ١} - ٣٣ \times ٢^{س} + ١٦ = ٠$

٤) $٣^{س} + \frac{٨١}{٣^{س}} = ٣٠$

٥) $٤٩^{س} - ٥٠ \times ٧^{س} + ٤٩ = ٠$

٦) $٤^{س^{٢} - ٨} - ٤ \times ٢^{س^{٢} - ٨} + ٤ = ٠$

هـ) أوجد في ح × ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١) $٢^{س - ص} = ١٢٨$ ، $٧^{س + ص} = ١$

٢) $٣^{س} \times ٥^{ص} = ٧٥$ ، $٣^{ص} \times ٥^{س} = ٤٥$

٣) $٢^{س} \times ٧^{ص} = ٢٨$ ، $٧^{س} \times ٢^{ص} = ٩٨$

٤) $٣^{س} \times ٣^{ص} = ٢٧$ ، $٣^{س} + ٣^{ص} = ١٢$

الأســس الكسـرية

تعريف :

لكل أ ، ب $\in$ ح$_+$ ، ن $\in$ ص$_+$ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = ب \leftrightarrow أ = ب^{ن}$

فمثلاً : إذا كان : س $\in$ ح$_+$ فإن : $س = ٥^{\frac{١}{٢}} \leftrightarrow س^{٢} = ٥$

الجذر النونى للعدد :

إذا كان : أ $\in$ ح$_+$ ، ن $\in$ ص$_+$ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ ويقرأ الجذر النونى للعدد أ

فمثلاً : $٩^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣$

تعريف :

إذا كان أ > ٠ ، م $\in$ ص ، ن $\in$ ص$_+$ يكون :

$$أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}} = \left(\sqrt[ن]{أ}\right)^{م}$$

" بمعنى دليل الجذر مقام للأس "

فمثلاً : $\sqrt[٤]{(٨١)^{٣}} = (٨١)^{\frac{٣}{٤}} = (٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}} = ٣^{٣} = ٢٧$

ملحوظـــة هامة : جميـــــع قوانين الأسس الصحيحة يمكن تطبيقها على الأسس الكسريـــة

أمثلة :

(١) إختصــــر : $\sqrt[٦]{س} \times \sqrt[١٠]{س^{٧}} \times \sqrt[١٥]{س^{٢}}$

الحل

المقدار $= س^{\frac{١}{٦}} \times س^{\frac{٧}{١٠}} \times س^{\frac{٢}{١٥}} = س^{\frac{١}{٦} + \frac{٧}{١٠} + \frac{٢}{١٥}} = س^{\frac{٣٠}{٣٠}} = س$

(٢) إثبت أن :

$$\frac{(٣٤٣)^{٢س - \frac{١}{٣}} \times \left(\sqrt{١٦}\right)^{٣س + \frac{١}{٣}}}{\left(\sqrt[٣]{٤}\right)^{٩س + ١} \times (٤٩)^{٣س}} = \frac{١}{٧}$$

الحل

الأيمن $= \dfrac{٧^{٦س - ١} \times ٢^{٦س + \frac{٢}{٣}}}{٢^{٦س + \frac{٢}{٣}} \times ٧^{٦س}} = ٧^{٦س - ١ - ٦س} \times ٢^{٦س + \frac{٢}{٣} - ٦س - \frac{٢}{٣}}$

$= ٧^{-١} \times ٢^{صفر} = \frac{١}{٧} =$ الأيسر

(٣) حل المعادلة : $(س + ٢)^{\frac{١}{٢}} = ٢٧^{\frac{١}{٣}}$

الحل

$(س + ٢)^{\frac{١}{٢}} = ٣$

$س + ٢ = ٣^{٢}$

$س + ٢ = ٩$

$س = ٧$

تمـــــــــارين

(١) إثبت أن :

(أ) $\dfrac{(٣٤٣)^{٢\text{ص}} \times (٤)^{٣\text{ص}-١}}{(١٩٦)^{٣\text{ص}}} = \dfrac{١}{٤}$

(ب) $\dfrac{\sqrt[\text{م}]{٧^{\text{م}^{٢}+٣\text{م}}} \times (٣)^{١+\text{م}}}{(٩)^{\text{م}-١} \times (٤٩)^{\text{م}-١} \times (٢١)^{٥-\text{م}}} = ٩$

(٢) إذ كان : $\dfrac{١٥^{٤\text{س}} \times ٢^{٧\text{س}} \times \left(\frac{١}{٥}\right)^{\text{س}}}{٦^{٤\text{س}} \times ١٠^{٣\text{س}}} = ٥^{\text{س}^{٢}-٣\text{س}}$ أوجد قيمة : س

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

١ – (أ) $(\text{س}+٥)^{\frac{١}{٢}} - ٤ = ٠$ (ب) $(\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}} = (٢٧)^{\frac{١}{٣}}$

٢ – (أ) $(\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt{٨}$ (ب) $(\text{س}-٢)^{\frac{١}{٢}} = (٣٢)^{\frac{١}{٥}}$

٣ – (أ) $٥^{٢\text{س}} - ٢٦ \times ٥^{\text{س}} + ٢٥ = ٠$ (ب) $٧^{٢\text{س}} - ٥٠ \times ٧^{\text{س}} + ٤٩ = ٠$

٤ – (أ) $٤^{\text{س}} - ٦ \times ٢^{\text{س}} + ٨ = ٠$ (ب) $٩^{\text{س}} - ٣٠ \times ٣^{\text{س}} + ٨١ = ٠$

٥ – (أ) $٥^{\text{س}} + \dfrac{١٢٥}{٥^{\text{س}}} = ٣٠$ (ب) $٢^{\text{س}} + \dfrac{٣٢}{٢^{\text{س}}} = ١٢$

٦ – (أ) $٣^{\text{س}} + ٣^{\text{س}+٢} = ٩٠$ (ب) $٥^{\text{س}} + ٥^{\text{س}+١} = ٣٠$

٧ – (أ) $٢^{٢\text{س}+١} + ٢^{٢\text{س}-١} = ٤٠$ (ب) $٧^{\text{س}} - ٧^{\text{س}-١} = ٤٢$

(٤) إذا كان : $\text{ص}^{\frac{٣}{٤}} = ٢\,\text{س}^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ أوجد قيمة : $٥\text{س} + ٢\text{ص}$

(٥) إذا كان : $٣ \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} = \sqrt{\text{ص}^{٣}} = ٢٧$ أوجد قيمة : $\text{س} + ٢\text{ص}$

(٦) إذا كان : $٤^{\text{س}+\text{ص}} = ١٢٨$ ، $\text{ص}^{\text{س}-٢\text{ص}-٣} = ١$ أوجد قيمة كل من : س ، ص

الدالة الأسية

تعريف :

إذا كان ﻡ عدداً حقيقياً موجباً $\neq$ ١ فإن الدالة :

$\text{د} : \text{ح} \leftarrow \text{ح}_{+}$ حيث : $\text{د}(\text{س}) = \text{ﻡ}^{\text{س}}$ تسمى دالة أسية أساسها ﻡ

فمثلاً :

الدالة $\text{د} : \text{ح} \leftarrow \text{ح}_{+}$ ، $\text{د}(\text{س}) = ٣^{\text{س}}$ دالة أسية أساسها ٣

، الدالة $\text{د} : \text{ح} \leftarrow \text{ح}_{+}$ ، $\text{د}(\text{س}) = (\frac{١}{٢})^{\text{س}}$ دالة أسية أساسها $\frac{١}{٢}$

مثال :

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٧^{\text{س}}$ ؛ $\text{د}(\text{س}) + \text{د}(\text{س} - ١) = ٦٥$ أوجد قيمة س

الحل

$\because \text{د}(\text{س}) = ٧^{\text{س}}$ $\therefore ٧^{\text{س}} + ٧^{\text{س}-١} = ٦٥$

$\therefore ٧^{\text{س}-١} \times (٧ + ١) = ٦٥$ $\therefore ٧^{\text{س}-١} \times ٨ = ٦٥$

$\therefore ٧^{\text{س}-١} = ٧$ $\therefore \text{س} - ١ = ١$ $\therefore \text{س} = ٢$

تمارين

١ – إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٢^{\text{س}}$ ؛ $\text{د}(\text{س}) + \text{د}(\text{س} - ٣) = ٧٢$ أوجد قيمة س

٢– إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٥^{\text{س}}$ ؛ $\text{د}(\text{س} + ١) + \text{د}(\text{س} - ١) = ١٣٠$ أوجد قيمة س

٣– إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٣^{\text{س}}$ ؛ $\text{د}(\text{س} + ١) - \text{د}(\text{س} - ٢) = ٢٣٤$ أوجد قيمة س

٤– إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٣^{\text{س}}$ ؛ $\text{د}(\text{س} + ١) - \text{د}(\text{س} - ١) = ٢٤$ أوجد قيمة س

٥– إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٧^{\text{س}}$ ؛ $\text{د}(٣\text{س} + ١) + \text{د}(٣\text{س} - ١) = \frac{٥٠}{٤٩}$ أوجد قيمة س

٦– إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٢^{\text{س}}$ ؛ $\text{د}(٣\text{س} + ١) - \text{د}(٣\text{س} - ١) = \frac{٣}{١٦}$ أوجد قيمة س

٧– إذا كانت $\text{د}_{١}(\text{س}) = ٢^{\text{س}}$ ؛ $\text{د}_{٢}(\text{س}) = ٤^{\text{س}}$ ؛ $\text{د}_{١}(٢\text{س} + ١) + \text{د}_{٢}(\text{س} - ١) = ٧٢$ أوجد قيمة س

٨ – ذا كانت $\text{د}_{١}(\text{س}) = ٣^{\text{س}}$ ؛ $\text{د}_{٢}(\text{س}) = ٩^{\text{س}}$ ؛ $\text{د}_{١}(٢\text{س} - ١) + \text{د}_{٢}(\text{س} + ١) = ٧٥٦$ أوجد قيمة س

٩– إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٣^{\text{س}}$ فإثبت أن : $\frac{\text{د}(٢\text{س}+٢) - \text{د}(٢\text{س}-١)}{٥\,\text{د}(٢\text{س}) - ٧\,\text{د}(٢\text{س}-١)} = \frac{٧}{٢}$

١٠– إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٢^{\text{س}}$ فإثبت أن : $\frac{\text{د}(\text{س}+١)}{\text{د}(\text{س}-١)} + \frac{\text{د}(\text{س}-١)}{\text{د}(\text{س}+١)} = \frac{١٧}{٤}$

١١– إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٧^{\text{س}}$ فإثبت أن $٧^{\text{ص}} \cdot \text{د}(\text{س} - \text{ص}) = \text{د}(\text{س})$

١٢– إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٥^{\text{س}} + ٥^{-\text{س}}$ ؛ $\text{هـ}(\text{س}) = ٥^{\text{س}} - ٥^{-\text{س}}$ فإثبت أن $[\text{د}(\text{س})]^{٢} - [\text{هـ}(\text{س})]^{٢} = ٤$

١٣ – إذا كان $٤^{\text{س}+\text{ص}} = ١٢٨$ ؛ $٥^{\text{س}-٢\text{ص}-٣} = ١$ أوجد قيمة كلا من س ، ص

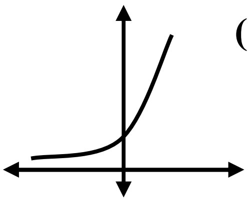
١٤ – إذا كان $٣^{\text{س}} \times ٥^{\text{ص}} = ٧٥$ ؛ $٣^{\text{ص}} \times ٥^{\text{س}} = ٤٥$ أوجد قيمة كلا من س ، ص

١٥ – إذا كان $\text{ص} = \frac{١}{٢}(٣^{\text{س}} + ٣^{-\text{س}})$ ، $\text{ع} = \frac{١}{٢}(٣^{\text{س}} - ٣^{-\text{س}})$ أوجد قيمة : $\text{ص}^{٢} - \text{ع}^{٢}$

التمثيل البيانى للدالة الأسية

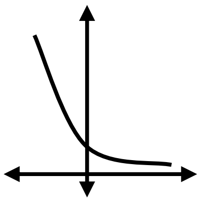
إذا كانت د (س) = أ^س فإن الخط البياني للدالة د(س) يمثل بالأزواج المرتبة (س ، أ^س)

(١) إذا كانت : أ > ١



المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)
المجال = ح
المدى = ح+ أي] ٠ ، ∞ [
الدالة تزايدية على ح
الدالة ليست زوجية وليست فردية
المنحنى يقع بكامله فوق محور السينات

(٢) إذا كانت ٠ < أ < ١



المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)
المجال = ح
المدى = ح+ أي] ٠ ، ∞ [
الدالة تناقصية على ح
الدالة ليست زوجية وليست فردية
المنحنى يقع بكامله فوق محور السينات

مثال :

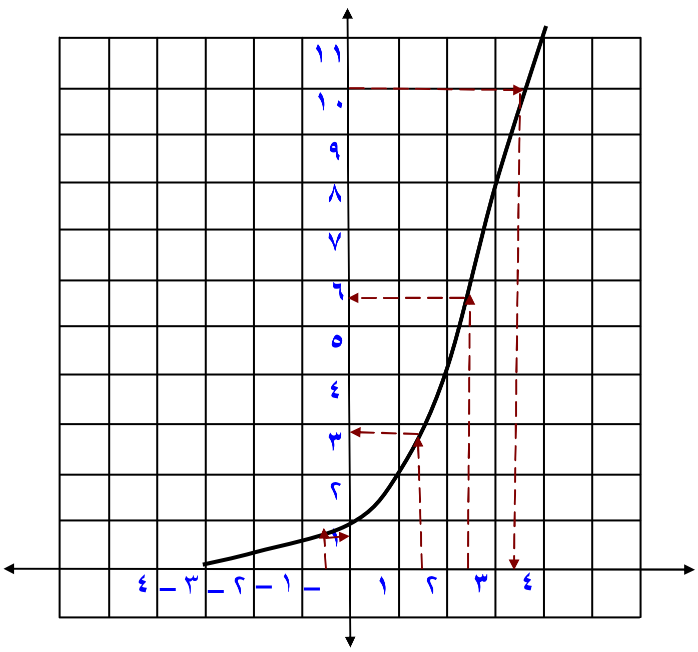
أرسم منحنى الدالة د (س) = ٢^س في الفترة [–٣ ، ٤] و من الرسم أوجد :

(١) د (–٠.٥)   (٢) د (١.٥)

(٣) قيمة تقريبية للعدد √٣٢   (٤) حل المعادلة د (س) = ١٠

الحل

س	٤	٣	٢	١	٠	–١	–٢	–٣
ص	١٦	٨	٤	٢	١	١/٢	١/٤	١/٨



لإيجاد قيمة د (– ٠.٥) :
نرسم مستقيماً عند – ٠.٥ يوازى محور الصادات
ليقابل المنحنى عند نقطة فنجدها تساوى تقريباً ٠.٧
∴ د (– ٠.٥) = ٠.٧
لإيجاد قيمة د (١.٥) نرسم كما سبق
نجد أن : د (١.٥) = ٢.٨
لإيجاد قيمة √٣٢   نلاحظ أن : ٣٢ = ٢^٥
∴ نوجد د (٥/٢) = د (٢ ١/٢) و نرسم كما فى السابق
∴ قيمة √٣٢ = ٥.٧
لإيجاد حل المعادلة : د (س) = ١٠
نرسم مستقيماً عند ص = ١٠ يوازى محور السينات
يقابل المنحنى عند نقطة فنجدها تساوى تقريبا ٣.٣
∴ د (س) = ١٠ عندما س = ٣.٣

تمـــــــارين

١ – إرسم منحنى الدالة د (س) = $٢^{س}$ متخذاً س ∈ [–٣ ، ٤] ومن الرسم أوجد د (١.٥) ؛ قيمة س عندما د (س) = ٧

٢ – إرسم منحنى الدالة د (س) = $٢^{-س}$ متخذاً س ∈ [–٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد قيمة س عندما $(\frac{١}{٢})^{س}$ = ٥.٣ ثم أوجد $\sqrt[٣]{٠.٢٥}$

٣ – إرسم منحنى الدالة د (س) = $٣^{س}$ متخذاً س ∈ [–٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد د (١.٥) ؛ قيمة س عندما د (س) = ٧ ؛ ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{٣}$

٤ – إرسم منحنى الدالة د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ متخذاً س ∈ [–٣ ، ٤] ومن الرسم أوجد د (– ٠.٤) ثم أوجد قيمة س عندما د (س) = ٨

٥ – إرسم منحنى الدالة د (س) = $٢^{س+١}$ متخذاً س ∈ [–٤ ، ٣] ومن الرسم أوجد قيمة د (١.٢) ثم أوجد قيمة س عندما د(س) = ١٤

٦ – إرسم منحنى الدالة د(س) = $\begin{cases} ٢^{س} ، & س \geq ٠ \\ ٢^{-س} ، & س < ٠ \end{cases}$

ومن الرسم إستنتج المدى والإطراد وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

٧ – إرسم منحنى الدالة د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ ، & س \geqslant ٠ \\ ٢^{-س} ، & س < ٠ \end{cases}$

ومن الرسم إستنتج المدى والإطراد وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

٨ – أوجد بيانياً مجموعة حل المعادلة : $٣^{س}$ = ٤ – س

٩ – بإستخدام منحنى الدالة د حيث : د (س) = $٢^{س + ١}$ ، س ∈ [–١ ، ٢]
حل المعادلة : $٢^{س + ١}$ = ٥